

Modelo dinámico acoplado y control de un manipulador paralelo móvil omnidireccional

Miguel G. Villarreal-Cervantes
CIDETEC-IPN

Av. J. de D. Bátiz, C.P. 07700, Mex. Av. IPN 2508, C.P. 07360, Mex. Av. IPN 2580, C.P. 07340, Mex.
mvillarrealc@ipn.mx

Tel.:+52 (55)57296000x52539

Carlos A. Cruz-Villar
CINVESTAV-IPN

Av. IPN 2508, C.P. 07360, Mex.
cacruz@cinvestav.mx

Tel.:+52 (55)5747 3800x3789

Sergio Saldívar, Levi García
UPIITA-IPN

Av. IPN 2580, C.P. 07340, Mex.
levi.eliel@gmail.com

Tel.:+52 (55)57296000x56912

Resumen— En este trabajo se obtiene el modelo dinámico de un manipulador paralelo móvil omnidireccional de 5 grados de libertad (*gdl*) con base en la formulación de Euler-Lagrange. La dinámica asociada del manipulador y del móvil se integran para obtener el modelo completo del sistema. Se expone la importancia de acoplar ambos sistemas. Por otra parte se propone una ley de control basada en el modelo que garantiza estabilidad asintótica en el origen. Se presenta el análisis de resultados en simulación.

Palabras clave: Dinámica, manipulador móvil, Euler-Lagrange.

I. INTRODUCCIÓN

Los manipuladores móviles son sistemas combinados que consisten de un brazo robótico montado sobre una plataforma móvil. La plataforma móvil puede ser un vehículo submarino (McMillan, et. al., 1995), un vehículo espacial (Moosavian y Papadopoulos, 2007), un barco (From et. al., 2009) o un vehículo terrestre (móvil) (Wronka y Dunnigan, 2011). Es claro que la dinámica del móvil se puede afectar por las fuerzas debidas al manipulador y a su vez la dinámica del manipulador se puede afectar por fuerzas externas debidas a la plataforma móvil o al medio ambiente en donde se encuentran, tales como, efectos de arrastre en la dinámica de fluidos, efectos al no considerar gravedad, superficie irregular, entre otras. Así, el interés en analizar tales sistemas proviene de sus aplicaciones en entornos industriales y sociales, así como de sus retos en investigación, los cuales se encuentran en su modelado, planeación de movimiento, navegación y control.

Este artículo se enfoca al caso de manipuladores móviles (brazo robótico montado sobre un vehículo móvil). Una revisión de la literatura relacionada con manipuladores móviles puede encontrarse en (Tchon y Jakubiak, 2003).

En relación al modelado de manipuladores móviles, aunque es común que la mayoría de trabajos empleen la metodología de Euler-Lagrange, existen variaciones en las suposiciones (en función de la aplicación que se le dará al modelo), lo cual da origen a diversos modelos. En (Wronka y Dunnigan, 2011), se presenta el modelo de un manipulador sobre una base móvil al considerar que la inercia de la base es tan grande, que no es influenciada por el movimiento del manipulador. Uno de los objetivos de este

trabajo es eliminar la suposición mencionada anteriormente y obtener un modelo acoplado, donde la inercia de la base afecte al manipulador y viceversa.

En relación al control de manipuladores móviles, es bien conocido que los controladores de mayor desempeño están basados en el modelo dinámico, por lo que el desempeño del controlador dependerá del modelo obtenido. En (Mazur, 2004) se presenta un algoritmo de control adaptable para seguimiento de trayectorias en el espacio de la tarea que toma en cuenta la dinámica no acoplada del manipulador móvil. Otro objetivo de este trabajo es proponer una ley de control que considere el modelo dinámico acoplado de la base y del manipulador.

En la Sección II se obtiene el modelo dinámico acoplado del manipulador móvil. La Sección III, presenta el problema de seguimiento de trayectorias y se propone el controlador basado en la dinámica acoplada. La Sección IV, presenta resultados de simulación. Finalmente, en la Sección V se presentan las conclusiones del trabajo.

II. MODELO DINÁMICO DEL MANIPULADOR MÓVIL OMNIDIRECCIONAL

Considere el manipulador móvil mostrado en la Fig. 1. El robot móvil considera tres grados de libertad (x, y, ϕ en la coordenada inercial) con tres ruedas omnidireccionales, las cuales tienen dos grados de libertad (G.D.L.), uno en la dirección axial y otro en la dirección tangencial. El manipulador montado sobre el móvil consiste de un brazo robótico paralelo de tres G.D.L. (q_1, q_2, q_3). En total, el efector final del manipulador móvil presenta cinco grados de libertad ($x_E, y_E, z_E, \psi_{Ez}, \psi_{Ey}$).

Sea $O_w, O_{m'}, O_E, O_{O_i}, O_j \in \mathbb{R}^3 \forall i = 0, \dots, 5, j = 1, \dots, 3$ el origen del sistema coordenado inercial, del manipulador móvil, del efector final, del i -ésimo eslabón y de la j -ésima rueda, respectivamente, $m_i, {}^c I_i, l_i, \forall i = 0, \dots, 5$ es la masa, el tensor de inercia en el centro de masa expresado en el mismo centro de masa y la longitud de los eslabones, respectivamente. ${}^{O_i} P_{c_i} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de posición del centro de masa del i -ésimo eslabón con respecto a O_i y ϕ es la orientación del robot con respecto al sistema coordenado inercial.

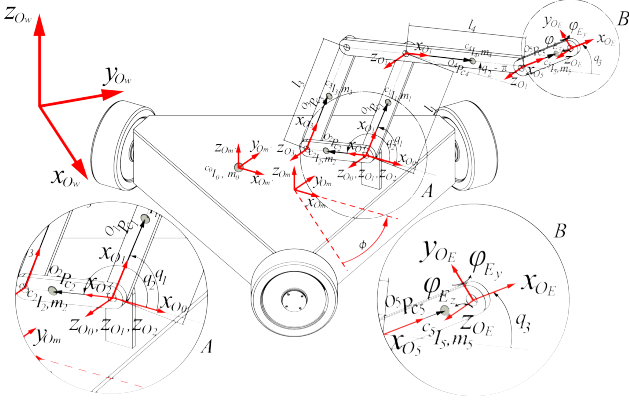


Figura 1: Diagrama esquemático del manipulador móvil.

En la Fig. 2 se muestra una vista superior del robot móvil, donde \bar{L} es la longitud del eje Z_{O_m} al eje $Z_i \forall i = 1, 2, 3$, $F_r = [F_{r1}, F_{r2}, F_{r3}]^T$ es el vector de fuerzas de las llantas, $F_m \in R^3$ es el vector de fuerzas resultante de F_r , $V_{O_{m'}} \in R^3$ es el vector de velocidad lineal en $O_{m'}$ resultante de las componentes de velocidad de las llantas $v_i \forall i = 1, 2, 3$.

Para obtener el modelo dinámico del manipulador móvil se asume que no existe deslizamiento en las ruedas. Considere que el sistema coordenado $O_{m'}$ se encuentra en el centro de gravedad del móvil. El sistema coordenado $O_{m'} \in R^3$ está alineado al sistema coordenado O_m y tiene las coordenadas ${}^m P_m = [s_1, s_2, 0]^T$ con respecto al sistema coordenado $O_{m'}$ como se observa en la Fig. 2. Así las velocidades lineales absolutas del centro de masa de cada cuerpo (móvil y eslabones) está dado por las ecs. (1)-(6), donde ${}^m V_{c_i} \in R^3$, $w_i \in R^3$ es el vector de velocidad lineal y angular absoluta del centro de masa del i -ésimo cuerpo, expresada en las coordenadas del móvil, respectivamente.

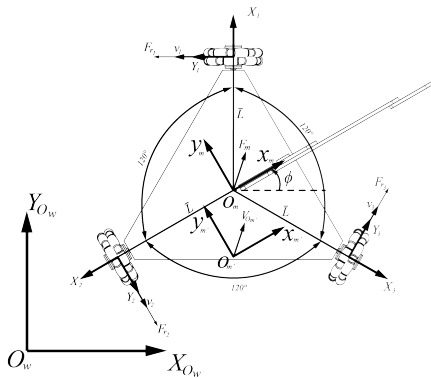


Figura 2: Vista hacia arriba del móvil.

$${}^m V_{c_0} = V_{O_m} + w_0 \times {}^m P_{m'} \quad (1)$$

$${}^m V_{c_1} = {}^m V_{c_0} + w_0 \times {}^{O_m} P_{O_0} + {}^{O_m} R^T w_1 \times {}^1 O_m R^1 P_{c_1} \quad (2)$$

$${}^m V_{c_2} = {}^m V_{c_0} + w_0 \times {}^{O_m} P_{O_0} + {}^{O_m} R^T w_2 \times {}^2 O_m R^2 P_{c_2} \quad (3)$$

$${}^m V_{c_3} = {}^m V_{c_0} + w_0 \times {}^{O_m} P_{O_0} + {}^{O_m} R^T w_2 \times {}^2 O_m R^2 P_{O_3} + {}^{O_m} R^T w_3 \times {}^3 O_m R^3 P_{c_3} \quad (4)$$

$${}^m V_{c_4} = {}^m V_{c_0} + w_0 \times {}^{O_m} P_{O_0} + {}^{O_m} R^T w_1 \times {}^1 O_m R^1 P_{O_4} + {}^{O_m} R^T w_4 \times {}^4 O_m R^4 P_{c_4} \quad (5)$$

$${}^m V_{c_5} = {}^m V_{c_0} + w_0 \times {}^{O_m} P_{O_0} + {}^{O_m} R^T w_1 \times {}^1 O_m R^1 P_{O_4} + {}^{O_m} R^T w_4 \times {}^4 O_m R^4 P_{O_5} + {}^{O_m} R^T w_5 \times {}^5 O_m R^5 P_{c_5} \quad (6)$$

donde $V_{O_m} = [\dot{x}_m \ \dot{y}_m \ 0]^T$, $w_0 = [0 \ 0 \ \dot{\phi}_m]^T$, ${}^{O_m} P_{O_0} = [l_{m_x}, 0, l_{m_z}]^T$, ${}^{O_2} P_{O_3} = [l_2, 0, 0]^T$, ${}^{O_1} P_{O_4} = [l_1, 0, 0]^T$, ${}^{O_4} P_{O_5} = [l_4, 0, 0]^T$, ${}^{O_i} P_{c_i} = [p_{c_{ix}}, 0, p_{c_{iz}}]^T \forall i = 1, \dots, 5$, ${}^{O_m} R = {}^{O_0} R^i {}^{O_0} R$, $w_1 = w_0 + {}^1 O_w R \dot{q}_1 \hat{Z}$, $w_2 = w_0 + {}^2 O_w R \dot{q}_2 \hat{Z}$, $w_3 = w_0 + {}^1 O_w R \dot{q}_1 \hat{Z}$, $w_4 = w_0 + {}^4 O_w R \dot{q}_2 \hat{Z}$, $w_5 = w_4 + {}^5 O_w R \dot{q}_3 \hat{Z}$, $\hat{Z} = [0 \ 0 \ 1]^T$, ${}^{O_0} R = R_x(\frac{\pi}{2})$, ${}^{O_m} R = R_z(\phi_m)$, ${}^0 R = {}^0_3 R = R_z(q_1)$, ${}^0 R = R_z(q_2)$, ${}^0 R = R_z(q_2 + \pi)$, ${}^0 R = R_z(q_2 + q_3 + \pi)$. $R_{x/y/z}(\theta) \in R^{3 \times 3}$ es la matriz de rotación en el eje x o y o z . de θ radianes y ${}^X P_Y \in R^3$ es el vector de posición del origen del sistema de coordenada Y con respecto al sistema de coordenada X .

La energía cinética K y la potencial V del manipulador móvil está dada en (7) y en (8), donde ${}^i w_i = {}^i O_w R^T w_i \forall i = 0, \dots, 5$, es la velocidad angular del móvil y del i -ésimo eslabón escrito en su mismo sistema de coordenada, $\theta = [\dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6]^T$ es el vector de velocidad de las ruedas y $\bar{J} = \text{diag}(\bar{J}, \bar{J}, \bar{J}) \in R^{3 \times 3}$ es la matriz diagonal con los momentos de inercia de las ruedas y $h_i \forall i = 0, \dots, 5$ es la altura en Z_{O_m} del centro de masa del i -ésimo eslabón, definiendose $\hat{Z} = [0, 0, 1]^T$.

$$K = \sum_{i=0}^5 \frac{1}{2} m_i V_{c_i}^T V_{c_i} + \sum_{i=0}^5 \frac{1}{2} {}^i w_i^T I_i {}^i w_i + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \bar{J} \dot{\theta} \quad (7)$$

$$V = \sum_{i=0}^5 m_i g h_i \quad (8)$$

donde:

$$h_0 = 0 \quad (9)$$

$$h_i = \hat{Z} \left({}^{O_m} P_{O_0} + {}^i O_m R^i P_{c_i} \right) \forall i = 1, 2 \quad (10)$$

$$h_3 = \hat{Z} \left({}^{O_m} P_{O_0} + {}^2 O_m R^2 P_{O_3} + {}^3 O_m R^3 P_{c_3} \right) \quad (11)$$

$$h_4 = \hat{Z} \left({}^{O_m} P_{O_0} + {}^1 O_m R^1 P_{O_4} + {}^4 O_m R^4 P_{c_4} \right) \quad (12)$$

$$h_5 = \hat{Z} \left({}^{O_m} P_{O_0} + {}^1 O_m R^1 P_{O_4} + {}^4 O_m R^4 P_{O_5} + {}^5 O_m R^5 P_{c_5} \right) \quad (13)$$

El Lagrangiano L está dado por:

$$L = K - V \quad (14)$$

Separando las coordenadas generalizadas en $q = [\eta \in R^3 \ \vartheta \in R^3]^T = [x_m \ y_m \ \phi_m \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, $\theta = [q_4 \ q_5 \ q_6]^T$ y considerando el vector de fuerzas y pares generalizadas $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \in R^3$, las ecuaciones de movimiento de Lagrange están dadas por la ecuación (15) y (16).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \bar{F}_1 \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \bar{F}_2 \quad (16)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el caso en particular del manipulador móvil, considerando $s_1 = s_2 = 0$ y $\dot{x}_m = \dot{s}_1$, $\dot{y}_m = \dot{s}_2$ se muestra en (17) y (18), donde el vector de fuerzas y pares generalizadas \bar{F}_1 está dada en (19), $I \in R^{3 \times 3}$ es una matriz identidad, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$ es el vector de pares en las articulaciones del manipulador, $\bar{\tau} = [\tau_4 \ \tau_5 \ \tau_6]^T$, $F_r = [F_{r1} \ F_{r2} \ F_{r3}]^T$ es el vector de pares y de fuerzas del móvil y $\bar{R} = \bar{\tau} I \in R^{3 \times 3}$ es la matriz diagonal con los radios r de las ruedas, respectivamente.

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + G = \bar{F}_1 \quad (17)$$

$$\bar{J} \ddot{\theta} = \bar{\tau} - \bar{R} F_r \quad (18)$$

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ \tau \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \bar{L}_1 & \bar{L}_2 & \bar{L}_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

La matriz \bar{A} de la ec. (20) se obtiene al realizar un análisis estático de fuerzas y momentos en el centro de masa del móvil, como se observa en la Fig. 2.

Considerando el mapeo (21) que relaciona las aceleraciones en el espacio Cartesiano del móvil $\ddot{\eta}_m = [\ddot{x}_m \ \ddot{y}_m \ \ddot{\phi}_m]^T$ con las aceleraciones en el espacio articular de la rueda del móvil $\ddot{\theta}$, la ecuación (18), resulta en (22).

$$\ddot{\theta} = \bar{R}^{-1} \bar{A}^T \ddot{\eta}_m \quad (21)$$

$$\bar{J} \bar{R}^{-1} \bar{A}^T \ddot{\eta}_m = \bar{\tau} - \bar{R} F_r \quad (22)$$

Sustituyendo F_r de la ec. (22) en la ec. (17) resulta la ec. (23) donde $M_{i,j} \subset M \in R^{6 \times 6}$, $C_{i,j} \subset C \in R^{6 \times 6}$, $G_i \subset G \in R^6$, $\forall i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 6$, son los elementos de las matrices o vectores y se encuentran en el apéndice.

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + G = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}^{-1} (\bar{\tau} - \bar{J} \bar{R}^{-1} \bar{A}^T \ddot{\eta}_m) \\ \tau \end{bmatrix} \quad (23)$$

Transformando $\ddot{\eta}_m$ en el espacio de coordenada inercial $\ddot{\eta}_w = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{\phi}]^T$ al considerar (24) resulta la ec. (25).

$$\dot{\eta}_m = {}^{O_w} R^T \dot{\eta}_w \quad (24)$$

$$\ddot{\eta}_m = {}^{O_w} R^T \ddot{\eta}_w + {}^{O_w} \dot{R}^T \dot{\eta}_w \quad (25)$$

Incorporando (25) y (24) en (23).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\bar{M}_a + H) {}^{O_w} R^T & \bar{M}_b \\ \bar{M}_c {}^{O_w} R^T & \bar{M}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_w \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \bar{C}_a {}^{O_w} R^T + (\bar{M}_a + H) {}^{O_w} \dot{R}^T & \bar{C}_b \\ \bar{C}_c {}^{O_w} R^T + \bar{M}_c {}^{O_w} \dot{R}^T & \bar{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_w \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + G \\ & = \begin{bmatrix} \bar{A} \bar{R}^{-1} & 0 \in R^{3 \times 3} \\ 0 \in R^{3 \times 3} & I \in R^{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ \tau \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

donde $H = \bar{A} \bar{R}^{-1} \bar{J} \bar{R}^{-1} \bar{A}^T$, $\bar{M}_a \in R^{3 \times 3} \subset \{M_{ij} \ \forall i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3\}$, $\bar{M}_b \in R^{3 \times 3} \subset \{M_{ij} \ \forall i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6\}$, $\bar{M}_c \in R^{3 \times 3} \subset \{M_{ij} \ \forall i = 4, 5, 6, j = 1, 2, 3\}$, $\bar{M}_d \in R^{3 \times 3} \subset \{M_{ij} \ \forall i = 4, 5, 6, j = 4, 5, 6\}$, $\bar{C}_a \in R^{3 \times 3} \subset \{C_{ij} \ \forall i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3\}$, $\bar{C}_b \in R^{3 \times 3} \subset \{C_{ij} \ \forall i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6\}$, $\bar{C}_c \in R^{3 \times 3} \subset \{C_{ij} \ \forall i = 4, 5, 6, j = 1, 2, 3\}$, $\bar{C}_d \in R^{3 \times 3} \subset \{C_{ij} \ \forall i = 4, 5, 6, j = 4, 5, 6\}$.

II-A. Representación en variables de estado

Definiendo el vector de estado $\chi = [x, y, \phi, q_1, q_2, q_3, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\phi}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T$, el vector de entrada $u = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6]^T$ y el vector de salida γ , el sistema (26) resulta:

$$\dot{\chi} = \hat{f}(\chi) + \hat{g}(\chi)u \quad (27)$$

$$\gamma = \hat{C} \chi \quad (28)$$

donde:

$$\hat{f}(\chi) = \begin{bmatrix} [0 \in R^{6 \times 6} \ I \in R^{6 \times 6}] \\ \left[\begin{bmatrix} (\bar{M}_a + H) {}^{O_w} R^T & \bar{M}_b \\ \bar{M}_c {}^{O_w} R^T & \bar{M}_d \end{bmatrix}^{-1} \right] \ddot{Q} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\hat{g}(\chi) = \begin{bmatrix} 0 \in R^{6 \times 12} \\ \left[\begin{bmatrix} (\bar{M}_a + H) {}^{O_w} R^T & \bar{M}_b \\ \bar{M}_c {}^{O_w} R^T & \bar{M}_d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A} \bar{R}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u \right] \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\hat{C} = I \in R^{12 \times 12} \quad (31)$$

$$\ddot{Q} = - \left(\begin{bmatrix} \bar{C}_a {}^{O_w} R^T + (\bar{M}_a + H) {}^{O_w} \dot{R}^T & \bar{C}_b \\ \bar{C}_c {}^{O_w} R^T + \bar{M}_c {}^{O_w} \dot{R}^T & \bar{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_w \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + G \right) \quad (32)$$

III. PROBLEMA DE SEGUIMIENTO

Se propone el sistema de control expresado en (33) tal que el sistema en lazo cerrado, considerando la transformación $z = \chi_d - \chi \in R^{12}$, resulta en (34), donde $\bar{v} = [\bar{v}_x \ \bar{v}_y \ \bar{v}_\phi \ \bar{v}_{q_1} \ \bar{v}_{q_2} \ \bar{v}_{q_3}]^T$, $v_\xi = \ddot{\xi}_d + k_{p\xi} \dot{e}_\xi + k_{d\xi} \dot{e}_\xi$, $e_\xi = \xi_d - \xi$, $\dot{e}_\xi = \dot{\xi}_d - \dot{\xi}$, $\forall \xi \in \{x \ y \ \phi \ q_1 \ q_2 \ q_3\}$ y $k_{p\xi} > 0$, $k_{d\xi} > 0$ es la ganancia proporcional y derivativa.

$$u = \left(\left[\begin{array}{cc} (\bar{M}_a + H)_{O_w}^{O_w} R^T & \bar{M}_b \\ \bar{M}_c & O_m^{O_m} R^T \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{cc} \bar{A}\bar{R}^{-1} & \mathbf{0} \in R^{3 \times 3} \\ \mathbf{0} \in R^{3 \times 3} & I \in R^{3 \times 3} \end{array} \right] \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} v - \left[\begin{array}{cc} (\bar{M}_a + H)_{O_m}^{O_w} R^T & \bar{M}_b \\ \bar{M}_c & O_m^{O_m} R^T \end{array} \right]^{-1} \\ \left(- \left[\begin{array}{cc} \bar{C}_a & O_m^{O_w} R^T + (\bar{M}_a + H)_{O_m}^{O_w} R^T \\ \bar{C}_c & O_m^{O_w} R^T + \bar{M}_c & O_m^{O_m} R^T \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\eta}_w \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} - G \right) \end{array} \right) \quad (33)$$

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} \in R^{6 \times 6} & I \in R^{6 \times 6} \\ -diag(k_{p\xi}) \in R^{6 \times 6} & -diag(k_{d\xi}) \in R^{6 \times 6} \end{array} \right] z \quad (34)$$

$$= Az \quad (35)$$

Se observa que el sistema en lazo cerrado (34) es una ecuación diferencial lineal y autónoma, tal que el único punto de equilibrio es $z = \mathbf{0} \in R^{12}$. Considere la función candidata de Lyapunov mostrada en (36).

$$V(z) = \frac{1}{2} z^T P z \quad (36)$$

La derivada con respecto al tiempo resulta en (37).

$$\dot{V} = -z^T Q z \quad (37)$$

donde

$$A^T P + P A = -Q \quad (38)$$

Utilizando el teorema generalizado de Krasovskii, se pueden obtener dos matrices simétricas y definidas positivas $P \in R^{12}$ y $Q \in R^{12}$ tal que $\forall z \neq 0$ la matriz $F(z) = A^T P + P A + Q$ es definida negativa y $V(z) \rightarrow \infty$ cuando $\|z\| \rightarrow \infty$ y por lo tanto la función (36) es una función de Lyapunov y el punto de equilibrio $z = \mathbf{0}$ del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable en forma global y entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

IV. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

Para realizar los resultados de simulación del modelo del manipulador móvil con el esquema de control propuesto, se considera las trayectorias deseadas mostradas en las ecuaciones (39)-(44). Se utiliza el método de integración de Runge Kutta de cuarto orden con condiciones iniciales $\chi(0) = [0, 0, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, paso de integración de $5ms$ y tiempo final $t_f = 150s$. Los parámetros del manipulador móvil así como del controlador se muestran en la Tabla I.

TABLA I: Parámetros del manipulador móvil.

[Kgm ²]	[Kgm ²]	[m]
$I_{0zz} = 0,0127$	$I_3 = I_{3xz}$	$l_1 = 0,2$
$I_1 = 2,52E - 4$	$I_4 = 5,85E - 4$	$l_2 = 0,05$
$I_{1xx} = 0,0017$	$I_4 = 0,0096$	$l_3 = 0,2$
$I_{1zz} = 8,5E - 13$	$I_4 = 1,97E - 7$	$l_4 = 0,25$
$I_{1xy} = 2,15E - 4$	$I_4 = -7,89E - 4$	$l_5 = 0,072$
$I_{1xz} = 8E - 13$	$I_4 = 5,71E - 9$	$p_{c1x} = 0,0687$
$I_2 = 9,43E - 5$	$I_5 = 1,88E - 5$	$p_{c1z} = 0,0130$
$I_2 = 1,82E - 4$	$I_5 = 1,13E - 4$	$p_{c2x} = 0,0163$
$I_2 = 1,03E - 4$	$I_5 = 1,05E - 4$	$p_{c2z} = 0,0031$
$I_2 = -7E - 13$	$I_5 = 2,19E - 8$	$p_{c3x} = 0,1$
$I_2 = 8,91E - 6$	$I_5 = -6E - 7$	$p_{c3z} = 0$
$I_2 = -1,94E - 12$	$I_5 = 3,33E - 9$	$p_{c4x} = -0,041$
$I_3 = 1,53E - 4$	$I_3 = 0,0012$	$p_{c4z} = 0,0163$
$I_3 = 0,0013$	$I_3 = 0$	$p_{c5x} = 0,0185$
$I_3 = 5,82E - 4$	$I_3 = 0$	$p_{c5z} = 0,0002$
$m_3 = 0,1647$	$[Kg]$	$l_{m_x} = 0,1002$
$m_4 = 0,6104$	$m_0 = 11,8316$	$l_{m_y} = 0,0583$
$m_5 = 0,1350$	$m_1 = 0,2404$	$\bar{L} = 0,28698$
	$m_2 = 0,1769$	$\bar{r} = 0,0625$
	$k_{p_i} = 1,5791 \ \forall i = 1, \dots, 6$	$g = 9,81m/s^2$
	$k_{d_i} = 2,5133 \ \forall i = 1, \dots, 6$	

$$\bar{x} = 0,5 \sin\left(\frac{2}{5}\pi t\right) + \sin\left(\frac{1}{20}\pi t\right) \quad (39)$$

$$\bar{y} = -0,5 \cos\left(\frac{2}{5}\pi t\right) - \cos\left(\frac{1}{20}\pi t\right) \quad (40)$$

$$\bar{\phi} = \pi \sin\left(\frac{1}{20}\pi t\right) \quad (41)$$

$$\bar{q}_1 = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{1}{20}\pi t\right) \quad (42)$$

$$\bar{q}_2 = \frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{1}{20}\pi t\right) \quad (43)$$

$$\bar{q}_3 = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{1}{20}\pi t\right) \quad (44)$$

En la Fig. 3 se muestra el error de posición en el seguimiento de la trayectoria. Se observa que el desempeño del controlador propuesto hace que el error de posición converga en un intervalo de error acotado a $1e-3$. Esto se debe a la dinámica acoplada de los dos sistemas (manipulador y móvil), ya que un sistema perturba al otro y viceversa, así la importancia de modelar en forma dinámica e integrada ambos sistemas. Para el caso en particular, este error es pequeño, pero para aplicaciones con grandes velocidades y aceleraciones ésto podría ser significativo.

En la Fig. 4 se presenta la señal de control del manipulador móvil. Se sintonizaron las ganancias de la ley de control de tal manera que no se excediera de $3Nm$ para fines prácticos.

En la Fig. 5 se muestra la trayectoria generada en el efector final en una vista isométrica (Fig. 5a) y una vista de arriba (Fig. 5b).

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta el modelo dinámico acoplado de un manipulador paralelo montado sobre un robot móvil omnidireccional. Éste modelo incluye las relaciones intrínsecas en velocidad, aceleración y fuerza/pares que

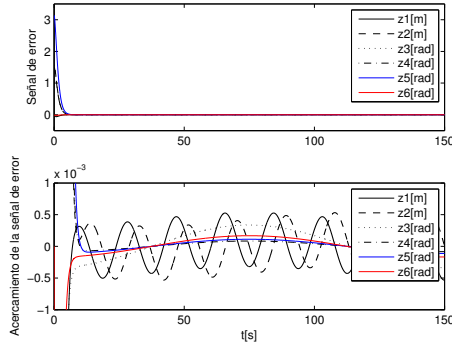


Figura 3: Error de posición en el seguimiento de la trayectoria.

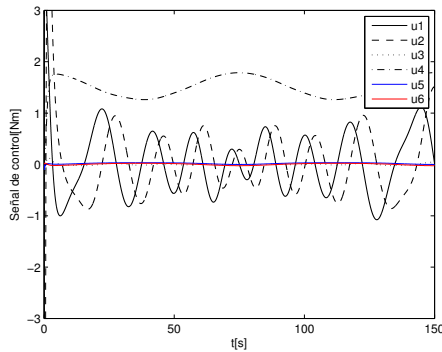


Figura 4: Señal de control en el seguimiento de la trayectoria.

existen en ambos sistemas (manipulador y móvil). El presente modelo se podrá aplicar para analizar y proponer estrategias de control que compensen los efectos (pares y fuerzas) producidos en el manipulador debido a grandes aceleraciones en el robot móvil y viceversa.

La estabilidad de la estrategia de control propuesta indica que el punto de equilibrio del sistema transformado (\dot{z}) converge a cero asintóticamente cuando el tiempo tiende a infinito. Sin embargo se observó que los efectos del móvil (manipulador) afectan en la convergencia del error a cero en las coordenadas generalizadas del manipulador (móvil).

Trabajo futuro es el análisis de los resultados obtenidos con los resultados experimentales de un manipulador móvil desarrollado en el CIDETEC-IPN bajo el proyecto SIP 20110165.

VI. AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo otorgado por COFAA y SIP del IPN en el proyecto no. SIP-20110165 y SIP-20120663.

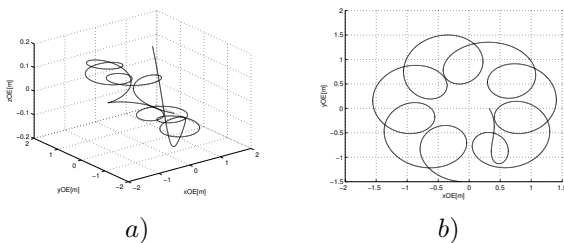


Figura 5: Trayectoria en el espacio Cartesiano.

REFERENCIAS

- Tchon, K. y J. Jakubiak (2003). Endogenous configuration space approach to mobile manipulators: a derivation and performance assessment of Jacobian inverse kinematics algorithms. *Int. J. Control* **76**, 1387-1419.
- S. McMillan, D. Orin y R. McGhee (1995). Efficient dynamic simulation of an underwater vehicle with a robotic manipulator. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **25**, 1194-1206.
- S.A.A. Moosavian y E. Papadopoulos (2007). Free-flying robots in space: an overview of dynamics modeling, planning and control. *Robotica* **25**, 537-547.
- P.J. From, V. Duindam y J.T. Gravdahl, S. (2009). Modeling and motion planning for mechanisms on a non-inertial base. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3320-3326.
- Mazur, A. (2004). Hybrid adaptive control laws solving a path following problem for nonholonomic mobile manipulators. *Int. J. Control* **77**, 1297-1306.
- Wronka, C.M. y M.W. Dunnigan (2011). Derivation and analysis of a dynamic model of a robotic manipulator on a moving base. *Rob. and Aut. Sys.* **59**, 758-769.

APÉNDICE

A continuación se muestran los elementos de las matrices M , C y G mostrados en la ecuación (23).

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \\
 M_{12} &= M_{21} = M_{24} = M_{42} = M_{25} = M_{26} = M_{62} = 0 \\
 M_{13} &= M_{31} = m_1 p_{c1z} + m_2 p_{c2z} + m_3 p_{c3z} + m_4 p_{c4z} + m_5 p_{c5z} \\
 M_{14} &= M_{41} = -\sin(q_1)(l_1 m_4 + l_1 m_5 + m_1 p_{c1x} + m_3 p_{c3x}) \\
 M_{15} &= l_4 m_5 \sin(q_2) - l_2 m_3 \sin(q_2) - m_2 p_{c2x} \sin(q_2) + m_4 p_{c4x} \sin(q_2) \\
 &\quad + m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) \\
 M_{16} &= M_{61} = m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) \\
 M_{22} &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \\
 M_{23} &= M_{32} = l_{m_x} m_1 + l_{m_x} m_2 + l_{m_x} m_3 + l_{m_x} m_4 + l_{m_x} m_5 \\
 &\quad - m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) + l_1 m_4 \cos(q_1) + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_1 m_5 \cos(q_1) \\
 &\quad - l_4 m_5 \cos(q_2) + m_1 p_{c1x} \cos(q_1) + m_2 p_{c2x} \cos(q_2) + m_3 p_{c3x} \cos(q_1) \\
 &\quad - m_4 p_{c4x} \cos(q_2) \\
 M_{33} &= I_{0zz} + I_{1xx} + I_{2xx} + I_{3xx} + I_{4xx} + \frac{I_{5xx}}{2} + \frac{I_{5yy}}{2} + l_{m_x}^2 m_1 + l_{m_x}^2 m_2 \\
 &\quad + l_{m_x}^2 m_3 + l_{m_x}^2 m_4 + l_{m_x}^2 m_5 + m_1 p_{c1z}^2 + m_2 p_{c2z}^2 + m_3 p_{c3z}^2 \\
 &\quad + m_4 p_{c4z}^2 + \frac{m_5 p_{c5x}^2}{2} + m_5 p_{c5z}^2 - I_{1xx} \cos(q_1)^2 + I_{1yy} \cos(q_1)^2 \\
 &\quad - I_{2xx} \cos(q_2)^2 + I_{2yy} \cos(q_2)^2 - I_{3xx} \cos(q_1)^2 + I_{3yy} \cos(q_1)^2 \\
 &\quad - I_{4xx} \cos(q_2)^2 + I_{4yy} \cos(q_2)^2 + I_{1xy} \sin(2q_1) + I_{2xy} \sin(2q_2) \\
 &\quad + I_{3xy} \sin(2q_1) + I_{4xy} \sin(2q_2) - \frac{I_{5xx} \cos(2q_2 + 2q_3)}{2} \\
 &\quad + \frac{I_{5yy} \cos(2q_2 + 2q_3)}{2} + I_{5xy} \sin(2q_2 + 2q_3) + l_1^2 m_4 \cos(q_1)^2 \\
 &\quad + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 + l_1^2 m_5 \cos(q_1)^2 + l_4^2 m_5 \cos(q_2)^2 \\
 &\quad + m_1 p_{c1x}^2 \cos(q_1)^2 + m_2 p_{c2x}^2 \cos(q_2)^2 + m_3 p_{c3x}^2 \cos(q_1)^2 \\
 &\quad + m_4 p_{c4x}^2 \cos(q_2)^2 + \frac{m_5 p_{c5x}^2 \cos(2q_2 + 2q_3)}{2} \\
 &\quad - l_1 l_4 m_5 \cos(q_1 + q_2) + l_2 m_3 p_{c3x} \cos(q_1 + q_2) \\
 &\quad - l_1 m_4 p_{c4x} \cos(q_1 + q_2) - 2l_{m_x} m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) \\
 &\quad - l_1 m_5 p_{c5x} \cos(q_1 - q_2 - q_3) \\
 &\quad + 2l_1 l_{m_x} m_4 \cos(q_1) + 2l_2 l_{m_x} m_3 \cos(q_2) + 2l_1 l_{m_x} m_5 \cos(q_1) \\
 &\quad - 2l_4 l_{m_x} m_5 \cos(q_2) + l_4 m_5 p_{c5x} \cos(q_3) + 2l_{m_x} m_1 p_{c1x} \cos(q_1) \\
 &\quad + 2l_{m_x} m_2 p_{c2x} \cos(q_2) + 2l_{m_x} m_3 p_{c3x} \cos(q_1) - 2l_{m_x} m_4 p_{c4x} \cos(q_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -l_1 m_5 p_{c5x} \cos(q_1 + q_2 + q_3) - l_1 l_4 m_5 \cos(q_1 - q_2) \\
& + l_2 m_3 p_{c3x} \cos(q_1 - q_2) - l_1 m_4 p_{c4x} \cos(q_1 - q_2) \\
& + l_4 m_5 p_{c5x} \cos(2q_2 + q_3) \\
M_{34} = M_{43} = & I_{1yz} \cos(q_1) + I_{3yz} \cos(q_1) + I_{1xz} \sin(q_1) + I_{3xz} \sin(q_1) \\
& - l_1 m_4 p_{c4z} \sin(q_1) - l_1 m_5 p_{c5z} \sin(q_1) - m_1 p_{c1x} p_{c1z} \sin(q_1) \\
& - m_3 p_{c3x} p_{c3z} \sin(q_1) \\
M_{35} = M_{53} = & -(I_{5yz} \cos(q_2 + q_3) + I_{5xz} \sin(q_2 + q_3) - I_{2yz} \cos(q_2) \\
& + I_{4yz} \cos(q_2) - I_{2xz} \sin(q_2) + I_{4xz} \sin(q_2) - m_5 p_{c5x} p_{c5z} \sin(q_2 + q_3) \\
& + l_2 m_3 p_{c3z} \sin(q_2) - l_4 m_5 p_{c5z} \sin(q_2) + m_2 p_{c2x} p_{c2z} \sin(q_2) \\
& - m_4 p_{c4x} p_{c4z} \sin(q_2)) \\
M_{36} = M_{63} = & -(I_{5yz} \cos(q_2 + q_3) + I_{5xz} \sin(q_2 + q_3) \\
& - m_5 p_{c5x} p_{c5z} \sin(q_2 + q_3)) \\
M_{44} = & I_{1zz} + I_{3zz} + l_1^2 m_4 + l_1^2 m_5 + m_1 p_{c1x}^2 + m_3 p_{c3x}^2 \\
M_{45} = M_{54} = & -(l_1 m_5 p_{c5x} \cos(q_1 - q_2 - q_3) + l_1 l_4 m_5 \cos(q_1 - q_2) \\
& - l_2 m_3 p_{c3x} \cos(q_1 - q_2) + l_1 m_4 p_{c4x} \cos(q_1 - q_2)) \\
M_{46} = & -l_1 m_5 p_{c5x} \cos(q_1 - q_2 - q_3) \\
M_{55} = & m_3 l_2^2 + m_5 l_4^2 + 2m_5 \cos(q_3) l_4 p_{c5x} + m_2 p_{c2x}^2 + m_4 p_{c4x}^2 + m_5 p_{c5x}^2 \\
& + I_{2zz} + I_{4zz} + I_{5zz} \\
M_{56} = M_{65} = & m_5 p_{c5x}^2 + l_4 m_5 \cos(q_3) p_{c5x} + I_{5zz} \\
M_{66} = & m_5 p_{c5x}^2 + I_{5zz} \\
G_1 = G_2 = G_3 = & 0 \\
G_4 = & g(l_1 m_4 \cos(q_1) + l_1 m_5 \cos(q_1) + m_1 p_{c1x} \cos(q_1) \\
& + m_3 p_{c3x} \cos(q_1)) \\
G_5 = & -g(m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) - l_2 m_3 \cos(q_2) + l_4 m_5 \cos(q_2) \\
& - m_2 p_{c2x} \cos(q_2) + m_4 p_{c4x} \cos(q_2)) \\
G_6 = & -g m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) \\
C_{11} = C_{13} = C_{22} = C_{25} = C_{41} = C_{44} = C_{51} = C_{61} = C_{66} = & 0 \\
C_{12} = & -\dot{\phi}_m (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) \\
C_{14} = & -\cos(q_1) (l_1 m_4 + l_1 m_5 + m_1 p_{c1x} + m_3 p_{c3x}) \dot{q}_1 \\
C_{15} = & (m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) - l_2 m_3 \cos(q_2) + l_4 m_5 \cos(q_2) \\
& - m_2 p_{c2x} \cos(q_2) + m_4 p_{c4x} \cos(q_2)) \dot{q}_2 \\
C_{16} = & m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_3 + 2m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_2 \\
C_{21} = & \dot{\phi}_m (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) \\
C_{23} = & \dot{q}_2 (l_4 m_5 \sin(q_2) - l_2 m_3 \sin(q_2) - m_2 p_{c2x} \sin(q_2) \\
& + m_4 p_{c4x} \sin(q_2) + m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3)) \\
C_{24} = & -\dot{\phi}_m \sin(q_1) (l_1 m_4 + l_1 m_5 + m_1 p_{c1x} + m_3 p_{c3x}) \\
C_{26} = & \dot{\phi}_m m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) \\
C_{31} = & \dot{\phi}_m (2l_1 m_x m_1 + 2l_1 m_x m_2 + 2l_1 m_x m_3 + 2l_1 m_x m_4 + 2l_1 m_x m_5 \\
& - 2m_5 p_{c5x} \cos(q_2 + q_3) + 2l_1 m_4 \cos(q_1) \\
& + 2l_2 m_3 \cos(q_2) + 2l_1 m_5 \cos(q_1) - 2l_4 m_5 \cos(q_2) \\
& + 2m_1 p_{c1x} \cos(q_1) + 2m_2 p_{c2x} \cos(q_2) + 2m_3 p_{c3x} \cos(q_1) \\
& - 2m_4 p_{c4x} \cos(q_2)) \\
C_{32} = & -\dot{\phi}_m (2m_1 p_{c1z} + 2m_2 p_{c2z} + 2m_3 p_{c3z} + 2m_4 p_{c4z} + 2m_5 p_{c5z}) \\
C_{33} = & -(I_{2yy} \sin(2q_2) - 2I_{4xy} \cos(2q_2) - I_{2xx} \sin(2q_2) - 2I_{2xy} \cos(2q_2) \\
& - I_{4xx} \sin(2q_2) + I_{4yy} \sin(2q_2) - 2I_{5xy} \cos(2q_2 + 2q_3) \\
& - I_{5xx} \sin(2q_2 + 2q_3) + I_{5yy} \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) \\
& + l_4^2 m_5 \sin(2q_2) + m_2 p_{c2x}^2 \sin(2q_2) + m_4 p_{c4x}^2 \sin(2q_2) \\
& + m_5 p_{c5x}^2 \sin(2q_2 + 2q_3) - l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 + q_2) \\
& + l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 + q_2) - l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 + q_2) \\
& - 2l_1 m_x m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) + l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) \\
& + 2l_2 l_{m_x} m_3 \sin(q_2) - 2l_4 l_{m_x} m_5 \sin(q_2) + 2l_1 m_x m_2 p_{c2x} \sin(q_2) \\
& - 2l_1 m_x m_4 p_{c4x} \sin(q_2) - l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
& + l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 - q_2) - l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 - q_2) \\
& + l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 - q_2) + 2l_4 m_5 p_{c5x} \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_2 \\
& - (2I_{1xy} + 2I_{3xy} - 4I_{1xy} \cos(q_1)^2 - 4I_{3xy} \cos(q_1)^2 - I_{1xx} \sin(2q_1) \\
& + I_{1yy} \sin(2q_1) - I_{3xx} \sin(2q_1) + I_{3yy} \sin(2q_1) + l_1^2 m_4 \sin(2q_1) \\
& + l_1^2 m_5 \sin(2q_1) + m_1 p_{c1x}^2 \sin(2q_1) + m_3 p_{c3x}^2 \sin(2q_1) \\
& + 2l_1 l_{m_x} m_4 \sin(q_1) + 2l_1 l_{m_x} m_5 \sin(q_1) + 2l_1 m_x m_1 p_{c1x} \sin(q_1) \\
& + 2l_1 m_x m_3 p_{c3x} \sin(q_1) - 2l_1 l_4 m_5 \cos(q_2) \sin(q_1) \\
& + 2l_2 m_3 p_{c3x} \cos(q_2) \sin(q_1) - 2l_1 m_4 p_{c4x} \cos(q_2) \sin(q_1) \\
& + 2l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1) \sin(q_2) \sin(q_3) \\
& - 2l_1 m_5 p_{c5x} \cos(q_2) \cos(q_3) \sin(q_1)) \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{34} = & (I_{1xz} \cos(q_1) + I_{3xz} \cos(q_1) - I_{1yz} \sin(q_1) - I_{3yz} \sin(q_1) \\
& - l_1 m_4 p_{c4z} \cos(q_1) - l_1 m_5 p_{c5z} \cos(q_1) - m_1 p_{c1x} p_{c1z} \cos(q_1) \\
& - m_3 p_{c3x} p_{c3z} \cos(q_1)) \dot{q}_1 \\
C_{35} = & (I_{5yz} \sin(q_2 + q_3) - I_{5xz} \cos(q_2 + q_3) + I_{2xz} \cos(q_2) \\
& - I_{4xz} \cos(q_2) - I_{2yz} \sin(q_2) + I_{4yz} \sin(q_2) + m_5 p_{c5x} p_{c5z} \cos(q_2 + q_3) \\
& - l_2 m_3 p_{c3z} \cos(q_2) + l_4 m_5 p_{c5z} \cos(q_2) - m_2 p_{c2x} p_{c2z} \cos(q_2) \\
& + m_4 p_{c4x} p_{c4z} \cos(q_2)) \dot{q}_2 \\
C_{36} = & (I_{5yz} \sin(q_2 + q_3) - I_{5xz} \cos(q_2 + q_3) + m_5 p_{c5x} p_{c5z} \cos(q_2 + q_3)) \dot{q}_3 \\
& + (2I_{5yz} \sin(q_2 + q_3) - 2I_{5xz} \cos(q_2 + q_3) \\
& + 2m_5 p_{c5x} p_{c5z} \cos(q_2 + q_3)) \dot{q}_2 - \dot{\phi}_m (I_{5yy} \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - I_{5xx} \sin(2q_2 + 2q_3) - 2I_{5xy} \cos(2q_2 + 2q_3) + m_5 p_{c5x}^2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - 2l_1 m_x m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) + l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) \\
& + l_4 m_5 p_{c5x} \sin(q_3) - l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\
& + l_4 m_5 p_{c5x} \sin(2q_2 + q_3)) \\
C_{42} = & (2l_1 m_4 \sin(q_1) + 2l_1 m_5 \sin(q_1) + 2m_1 p_{c1x} \sin(q_1) \\
& + 2m_3 p_{c3x} \sin(q_1)) \dot{\phi}_m \\
C_{43} = & \left(\frac{I_{1yy} \sin(2q_1)}{2} - I_{3xy} \cos(2q_1) - \frac{I_{1xx} \sin(2q_1)}{2} \right. \\
& - I_{1xy} \cos(2q_1) - \frac{I_{3xx} \sin(2q_1)}{2} + \frac{I_{3yy} \sin(2q_1)}{2} \\
& + \frac{l_1^2 m_4 \sin(2q_1)}{2} + \frac{l_1^2 m_5 \sin(2q_1)}{2} + \frac{m_1 p_{c1x}^2 \sin(2q_1)}{2} \\
& + \frac{m_3 p_{c3x}^2 \sin(2q_1)}{2} - \frac{l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 + q_2)}{2} \\
& + \frac{l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 + q_2)}{2} - \frac{l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 + q_2)}{2} \\
& \left. - \frac{l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3)}{2} + l_1 l_{m_x} m_4 \sin(q_1) + l_1 l_{m_x} m_5 \sin(q_1) \right. \\
& + l_{m_x} m_1 p_{c1x} \sin(q_1) + l_{m_x} m_3 p_{c3x} \sin(q_1) \\
& \left. - \frac{l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 + q_2 + q_3)}{2} - \frac{l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 - q_2)}{2} \right) \dot{\phi}_m \\
& + \frac{l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 - q_2)}{2} - \frac{l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 - q_2)}{2} \\
C_{45} = & (l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 - q_2) - l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 - q_2) \\
& - l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) - l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 - q_2)) \dot{q}_2 \\
C_{46} = & -l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) \dot{q}_3 - 2l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) \dot{q}_2 \\
C_{52} = & -(2l_4 m_5 \sin(q_2) - 2l_2 m_3 \sin(q_2) - 2m_2 p_{c2x} \sin(q_2) \\
& + 2m_4 p_{c4x} \sin(q_2) + 2m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3)) \dot{\phi}_m \\
C_{53} = & \left(\frac{I_{2yy} \sin(2q_2)}{2} - I_{4xy} \cos(2q_2) - \frac{I_{2xx} \sin(2q_2)}{2} \right. \\
& - I_{2xy} \cos(2q_2) - \frac{I_{4xx} \sin(2q_2)}{2} + \frac{I_{4yy} \sin(2q_2)}{2} \\
& - I_{5xy} \cos(2q_2 + 2q_3) - \frac{I_{5xx} \sin(2q_2 + 2q_3)}{2} \\
& \left. + \frac{I_{5yy} \sin(2q_2 + 2q_3)}{2} + \frac{l_2^2 m_3 \sin(2q_2)}{2} + \frac{l_4^2 m_5 \sin(2q_2)}{2} \right. \\
& + \frac{m_2 p_{c2x}^2 \sin(2q_2)}{2} + \frac{m_4 p_{c4x}^2 \sin(2q_2)}{2} \\
& + \frac{m_5 p_{c5x}^2 \sin(2q_2 + 2q_3)}{2} - \frac{l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 + q_2)}{2} \\
& + \frac{l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 + q_2)}{2} - \frac{l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 + q_2)}{2} \\
& \left. - l_{m_x} m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) + \frac{l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3)}{2} \right. \\
& + l_2 l_{m_x} m_3 \sin(q_2) - l_4 l_{m_x} m_5 \sin(q_2) + l_{m_x} m_2 p_{c2x} \sin(q_2) \\
& \left. - l_{m_x} m_4 p_{c4x} \sin(q_2) - \frac{l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 + q_2 + q_3)}{2} \right. \\
& \left. + \frac{l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 - q_2)}{2} - \frac{l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 - q_2)}{2} \right) \dot{\phi}_m \\
& + \frac{l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 - q_2)}{2} + l_4 m_5 p_{c5x} \sin(2q_2 + q_3) \\
C_{54} = & (l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) + l_1 l_4 m_5 \sin(q_1 - q_2) \\
& - l_2 m_3 p_{c3x} \sin(q_1 - q_2) + l_1 m_4 p_{c4x} \sin(q_1 - q_2)) \dot{q}_1 \\
C_{55} = & -2l_4 m_5 p_{c5x} \sin(q_3) \dot{q}_3 \quad C_{56} = -l_4 m_5 p_{c5x} \sin(q_3) \dot{q}_3 \\
C_{62} = & -2m_5 p_{c5x} \sin(q_2 + q_3) \dot{\phi}_m \\
C_{64} = & l_1 m_5 p_{c5x} \sin(q_1 - q_2 - q_3) \dot{q}_1 \quad C_{65} = l_4 m_5 p_{c5x} \sin(q_3) \dot{q}_2
\end{aligned}$$